SESSION 2000

# Concours Ecole Nationale de la Statistique et de l'Analyse Informatique

## Deuxième composition de Mathématiques

---

# PARTIE I

**1.** Soient $f \in E$ et $x > 0$.

• La fonction $t \mapsto \dfrac{tf(t)}{x^2+t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues sur $]0,+\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$.

• Quand $t$ tend vers $0$, $\left|\dfrac{tf(t)}{x^2+t^2}\right| \sim \dfrac{1}{x^2}|tf(t)|$ et comme la fonction $t \mapsto tf(t)$ est intégrable sur $]0,1]$, il en est de même de la fonction $t \mapsto \dfrac{tf(t)}{x^2+t^2}$.

• Quand $t$ tend vers $+\infty$, $\left|\dfrac{tf(t)}{x^2+t^2}\right| \sim \dfrac{|f(t)|}{t}$ et comme la fonction $t \mapsto \dfrac{f(t)}{t}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, il en est de même de la fonction $t \mapsto \dfrac{tf(t)}{x^2+t^2}$.

Finalement,

$$\boxed{\forall x > 0, \text{ la fonction } t \mapsto \dfrac{tf(t)}{x^2+t^2} \text{ est intégrable sur } ]0,+\infty[.}$$

**2.** **a.** Quand $t$ tend vers $+\infty$, $\dfrac{f(t)}{t} \sim \dfrac{1}{t\ln t} > 0$ qui n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$ car $\displaystyle\int_2^{+\infty} \dfrac{dt}{t\ln t} = \ln(\ln x) - \ln(\ln 2) \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$ et donc

$$\boxed{f_1 \text{ n'est pas dans } E.}$$

**b.** • $f_2$ est continue sur $]0,+\infty[$.

• Quand $t$ tend vers $0$ par valeurs supérieures, $tf_2(t) = \ln(1+t)$ se prolonge par continuité en $0$ et est donc intégrable sur $]0,1]$.

• Quand $t$ tend vers $+\infty$, $\dfrac{f(t)}{t} \sim \dfrac{\ln t}{t^2} = o\left(\dfrac{1}{t^{3/2}}\right)$ car $t^{3/2} \times \dfrac{\ln t}{t^2} = \dfrac{\ln t}{\sqrt{t}} \to 0$ et donc la fonction $t \mapsto \dfrac{f(t)}{t}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

On en déduit que

$$\boxed{f_2 \text{ est dans } E.}$$

**3.** **a.** $f$ est continue sur $]0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto tf(t) = \dfrac{\operatorname{Arctan} t}{t}$ se prolonge par continuité en $0$ et $\dfrac{f(t)}{t} = \dfrac{\operatorname{Arctan} t}{t^3}$ est négligeable devant $\dfrac{1}{t^2}$ en $+\infty$. Donc $f \in E$.

Soit $x > 0$. On peut poser $u = xt$ et on obtient

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan} u}{u(x^2+u^2)}\,du = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(xt))}{xt(x^2+x^2t^2)}\,x dt = \frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}\,dt.$$

$$\boxed{f \in E \text{ et } \forall x > 0,\ F(x) = \frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}\,dt.}$$

 

**b.** Posons $\Psi : \begin{array}{ccc} [0,+\infty[\times]0,+\infty[ & \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & \varphi(x,t) = \dfrac{\mathrm{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)} \end{array}$.

Pour tout réel $x$ de $[0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto \Psi(x,t)$ est continue sur $]0,+\infty[$ et intégrable sur $]0,+\infty[$, car est prolongeable par continuité en $0$ (par $x$) et dominée en $+\infty$ à $\dfrac{1}{t^3}$ qui est intégrable au voisinage de $+\infty$.

De plus, $\Psi$ admet sur $[0,+\infty[\times]0,+\infty[$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable $x$ à savoir :

$$\forall (x,t) \in [0,+\infty[\times]0,+\infty[,\ \frac{\partial \Psi}{\partial x}(x,t) = \frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}.$$

La fonction $\dfrac{\partial \Psi}{\partial x}$ vérifie les propriétés suivantes :

- pour tout réel $x$ de $]0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial \Psi}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $]0,+\infty[$ ;
- pour tout réel $t$ de $]0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial \Psi}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$ ;
- pour $(x,t) \in ]0,+\infty[\times]0,+\infty[$, $\left|\dfrac{\partial \Psi}{\partial x}(x,t)\right| = \dfrac{1}{1+t^2)(1+x^2t^2)} \leq \dfrac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$, où $\varphi$ est une fonction continue, positive et intégrable sur $]0,+\infty[$.

D'après le théorème de dérivation sous le signe somme (ou théorème de Leibniz), $G$ est de classe $C^1$ sur $]0,+\infty[$ et,

$$\boxed{\forall x \geq 0,\ G'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial \Psi}{\partial x}(x,t)\ dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}\ dt.}$$

**c.** Pour $x \geq 0$ et $x \neq 1$,

$$\begin{aligned} G'(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}\ dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1-x^2}\left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{x^2}{1+x^2t^2}\right)\ dt \\ &= \frac{1}{1-x^2}\left[\mathrm{Arctan}\, t - x\,\mathrm{Arctan}(xt)\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{1-x^2} \times \frac{\pi}{2} \times (1-x) = \frac{\pi}{2(x+1)}. \end{aligned}$$

Par continuité de $G'$ en $1$, l'égalité $G'(x) = \dfrac{\pi}{2(x+1)}$ reste valable pour $x = 1$.

$$\boxed{\forall x \in [0,+\infty[,\ G'(x) = \frac{\pi}{2(x+1)}.}$$

**d.** Mais alors, pour $x \geq 0$,

$$G(x) = G(0) + \int_0^x G'(t)\ dt = \frac{\pi}{2}\int_0^x \frac{1}{t+1}\ dt = \frac{\pi}{2}\ln(x+1),$$

puis,

$$\boxed{\forall x \in [0,+\infty[,\ F(x) = \frac{\pi}{2}\frac{\ln(1+x)}{x^2}.}$$

**e.** La fonction à intégrer est continue sur $]0,+\infty[$, prolongeable par continuité en $0$ et équivalente en $+\infty$ à $\dfrac{\pi^2}{4t^2}$. Cette fonction est intégrable sur $]0,+\infty[$.

Soient $\varepsilon$ et $A$ deux réels tels que $0 < \varepsilon < A$. Les deux fonctions $t \mapsto -\dfrac{1}{t}$ et $t \mapsto \mathrm{Arctan}^2\, t$ sont de classe $C^1$ sur le segment $[\varepsilon, A]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit :

$$\int_\varepsilon^A \frac{1}{t^2}\,\mathrm{Arctan}^2\, t\ dt = \left[-\frac{1}{t}\,\mathrm{Arctan}^2\, t\right]_\varepsilon^A + \int_\varepsilon^A \frac{1}{t}\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{Arctan}\, t\ dt = -\frac{\mathrm{Arctan}^2 A}{A} + \frac{\mathrm{Arctan}^2 \varepsilon}{\varepsilon} + 2\int_\varepsilon^A \frac{\mathrm{Arctan}\, t}{t(1+t^2)}\ dt$$

Quand $\varepsilon$ tend vers $0$ et $A$ tend vers $+\infty$, on obtient :

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{\mathrm{Arctan}\, t}{t}\right)^2\ dt = 2\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{Arctan}\, t}{t(1+t^2)}\ dt = 2G(1) = \pi\ln 2.$$

 

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\left(\frac{\operatorname{Arctan} t}{t}\right)^2 dt = \pi\ln 2.}$$

**4.** **a.** f est continue sur $]0,+\infty[$, $tf(t)=\cos(t)$ est prolongeable par continuité en 0 et $\dfrac{f(t)}{t}=\dfrac{\cos t}{t^2}$ est dominée par $\frac{1}{t^2}$ en $+\infty$ et donc est intégrable au voisinage de $+\infty$. De nouveau

$$\boxed{f\in E.}$$

**b.** Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on a $\varphi\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^{+\infty}\dfrac{\cos t}{\dfrac{1}{n^2}^2+t^2}\,dt=\displaystyle\int_0^{+\infty}\dfrac{\cos(u/n)}{1+u^2}\,du$ (en posant $t=\dfrac{u}{n}$).

Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $u\in[0,+\infty[$, posons $g_n(u)=\dfrac{\cos(u/n)}{1+u^2}$.

- chaque fonction $g_n$ est continue et intégrable sur $[0,+\infty[$ ;
- la suite de fonctions $(g_n)$ converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers la fonction $g::u\mapsto\dfrac{1}{1+u^2}$ qui est continue sur $[0,+\infty[$ ;
- Pour chaque $n\in\mathbb{N}^*$ et chaque $u\in[0,+\infty[$, on a $|g_n(u)|\leq\dfrac{1}{1+u^2}=g(u)$ où $g$ est une fonction intégrable sur $[0,+\infty[$.

D'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n\to+\infty}\varphi\left(\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}g_n(u)\,du=\int_0^{+\infty}g(u)\,du=[\operatorname{Arctan} u]_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{2}.$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\varphi\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{\pi}{2}.}$$

**c.** Pour $x>0$, en posant $u=xt$, on obtient

$$\varphi(x)=x\int_0^{+\infty}\frac{\cos u}{x^2+u^2}\,du=x\int_0^{+\infty}\frac{\cos(xt)}{x^2+x^2t^2}\,x dt=\int_0^{+\infty}\frac{\cos(xt)}{1+t^2}\,x dt.$$

Par suite, pour $x>0$,

$$|\varphi(x)|\leq\int_0^{+\infty}\frac{|\cos(xt)|}{1+t^2}\,dt\leq\int_0^{\infty}\frac{1}{1+t^2}\,dt=\frac{\pi}{2}.$$

$$\boxed{\varphi\text{ est bornée sur }\mathbb{R}_+^*.}$$

**d.** Pour $(x,t)\in]0,+\infty[^2$, $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{t}{x^2+t^2}\right)=\dfrac{-2xt}{(x^2+t^2)^2}$, puis

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{x^2+t^2}\right)=-2t\left(\frac{1}{(x^2+t^2)^2}+\frac{x(-2)(2x)}{(x^2+t^2)^3}\right)=\frac{-2t(t^2-3x^2)}{(x^2+t^2)^3}.$$

D'autre part, $\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{t}{x^2+t^2}\right)=\dfrac{(x^2+t^2)-2t^2}{(x^2+t^2)^2}=\dfrac{x^2-t^2}{(x^2+t^2)^2}$, puis

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{t}{x^2+t^2}\right)=-2t\frac{1}{(x^2+t^2)^2}+(x^2-t^2)\frac{(-2)(2t)}{(x^2+t^2)^3}=\frac{2t(t^2-3x^2)}{(x^2+t^2)^3}.$$

et finalement,

$$\boxed{\forall(x,t)\in]0,+\infty[^2,\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{t}{x^2+t^2}\right)+\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{t}{x^2+t^2}\right)=0.}$$

 

Pour $x > 0$, on a $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^2+t^2}\cos t\,dt$. On a aussi $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\dfrac{x}{x^2+t^2}\right) + \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\dfrac{x}{x^2+t^2}\right) = 0$ (erreur d'énoncé probable) au vu des rôles symétriques joués par $x$ et $t$.

Soient $a$ et $A$ deux réels tels que $0 < a < A$. On peut appliquer deux fois le théorème de Leibniz sur $[a, A]$ (et finalement sur $]0, +\infty[$) car pour $(x, t) \in [a, A] \times [0, +\infty[$,

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+t^2}\right)\right| = \left|\frac{t^2-x^2}{(x^2+t^2)^2}\right| \leq \frac{t^2+x^2}{(t^2+x^2)^2} = \frac{1}{x^2+t^2} \leq \frac{1}{a^2+t^2} = \varphi_1(t),$$

puis

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{x}{x^2+t^2}\right)\right| = \left|\frac{2x(x^2-3t^2)}{(x^2+t^2)^3}\right| \leq 2A\frac{3t^2+3x^2}{(t^2+x^2)^2} = \frac{6A}{(x^2+t^2)^2} \leq \frac{6A}{(a^2+t^2)^2} = \varphi_2(t),$$

où $\varphi_1$ et $\varphi_2$ sont des fonctions continues et intégrables sur $[0, +\infty[$

$\varphi$ est donc de classe $C^2$ sur $[0, +\infty[$ et pour $x > 0$,

$$\varphi''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{x}{x^2+t^2}\right)\cos t\,dt = -\int_0^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{x}{x^2+t^2}\right)\cos t\,dt.$$

Soit alors $A > 0$. Deux intégrations par parties fournissent

$$\begin{aligned}
\int_0^A \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{x}{x^2+t^2}\right)\cos t\,dt &= \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{x}{x^2+t^2}\right)\cos t\right]_0^A + \int_0^A \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{x}{x^2+t^2}\right)\sin t\,dt \\
&= -\frac{2xA}{(x^2+A^2)^2}\cos A + \left[\frac{x}{x^2+t^2}\sin t\right]_0^A - \int_0^A \frac{x}{x^2+t^2}\cos t\,dt \\
&= -\frac{2xA}{(x^2+A^2)^2}\cos A + \frac{x}{x^2+A^2}\sin A - \int_0^A \frac{x}{x^2+t^2}\cos t\,dt
\end{aligned}$$

Quand $A$ tend vers $+\infty$, on obtient

$$\varphi''(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{x}{x^2+t^2}\right)\cos t\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{x}{x^2+t^2}\cos t\,dt = \varphi(x).$$

$$\boxed{\forall x > 0,\ \varphi''(x) = \varphi(x).}$$

**e.** Par suite, il existe deux réels $A$ et $B$ tels que $\forall x \in ]0, +\infty[,\ \varphi(x) = Ae^x + Be^{-x}$.
La condition : $\varphi$ est bornée sur $]0, +\infty[$ fournit $A = 0$ et la condition $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \varphi\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{2}$ fournit $B = \dfrac{\pi}{2}$. Par suite $\forall x > 0,\ \varphi(x) = \dfrac{\pi}{2}e^{-x}$ et donc

$$\boxed{\forall x > 0,\ \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{x^2+t^2}\,dt = \frac{\pi e^{-x}}{2x}.}$$

# PARTIE II

**1.** On suppose que $T$ est strictement positif.
Pour $k \geq 1$, $u_k \geq \dfrac{1}{kT}\displaystyle\int_{kT}^{(k+1)T} |f(t)|\,dt = \frac{1}{kT}\int_0^T |f(t)|\,dt$ ($|f|$ étant $T$-périodique). Or, la fonction $|f|$ est continue, positive et non nulle sur $[0, T]$ et donc $\displaystyle\int_0^T |f(t)|\,dt > 0$. On en déduit que la série de terme général $\dfrac{1}{kT}\displaystyle\int_0^T |f(t)|\,dt$ diverge et il en est de même de la série de terme général $u_k$.

$$\boxed{\text{La série de terme général } u_k \text{ diverge.}}$$

 

**2.** (on suppose toujours que $T > 0$) Puisque la fonction $t \mapsto \dfrac{|f(t)|}{t}$ est continue et positive sur $[T, +\infty[$, cette fonction est intégrable au voisinage de $+\infty[$ si et seulement si la série de terme général $u_k$ converge (comparaison série-intégrale), ce qui n'est pas. Donc, la fonction $t \mapsto \dfrac{|f(t)|}{t}$ n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$ et

$$\boxed{f \notin E.}$$

**3.** Soit $y > T$. Posons $p = E\left(\dfrac{y}{T}\right)$. On a

$$h(y) = \sum_{k=0}^{p-1} \int_{kT}^{(k+1)T} f(t)\ dt + \int_{pT}^{y} f(t)\ dt = \sum_{k=0}^{p-1} \int_{0}^{T} f(t)\ dt + \int_{pT}^{y} f(t)\ dt = E\left(\frac{y}{T}\right) mT + \int_{pT}^{y} f(t)\ dt.$$

Maintenant, $my \leq E\left(\dfrac{y}{T}\right) mT \leq my + mT$ et donc,

$$1 \leq \frac{E(\frac{y}{T})mT}{my} \leq 1 + \frac{T}{y},$$

ce qui montre que $\dfrac{1}{my} E\left(\dfrac{y}{T}\right) mT$ tend vers 1 quand $y$ tend vers $+\infty$.

D'autre part,

$$\left|\int_{pT}^{y} f(t)\ dt\right| \leq \int_{pT}^{y} |f(t)|\ dt \leq \int_{pT}^{(p+1)T} |f(t)|\ dt = \int_{0}^{T} |f(t)|\ dt.$$

Ainsi, la fonction $y \mapsto \displaystyle\int_{pT}^{y} f(t)\ dt$ est bornée au voisinage de $+\infty$, et donc $\dfrac{1}{my} \displaystyle\int_{pT}^{y} f(t)\ dt$ tend vers 0 quand $y$ tend vers $+\infty$.

Finalement, quand $y$ tend vers $+\infty$, $\dfrac{h(y)}{my}$ tend vers 1 ou encore

$$\boxed{h(y) \underset{y \to +\infty}{\sim} my.}$$

**4.** Soient $x > 0$ et $A > 0$. Les deux fonctions $t \mapsto h(t)$ et $t \mapsto \dfrac{t}{x^2 + t^2}$ sont de classe $C^1$ sur $[0, A]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit

$$\int_{0}^{A} \frac{tf(t)}{x^2 + t^2}\ dt = \left[\frac{th(t)}{x^2 + t^2}\right]_{0}^{A} - \int_{0}^{A} \frac{(x^2 - t^2)h(t)}{(x^2 + t^2)^2}\ dt = \frac{Ah(A)}{x^2 + A^2} - \int_{0}^{A} \frac{(x^2 - t^2)h(t)}{(x^2 + t^2)^2}\ dt.$$

Quand $A$ tend vers $+\infty$, $\dfrac{Ah(A)}{x^2 + A^2} \sim \dfrac{A \times mA}{A^2} = m$ et donc $\dfrac{Ah(A)}{x^2 + A^2}$ a une limite réelle quand $A$ tend vers $+\infty$. D'autre part,

$$\left|\frac{(x^2 - t^2)h(t)}{(x^2 + t^2)^2}\right| \sim \frac{t^2 \times mt}{t^4} = \frac{m}{t} > 0.$$

Cette dernière fonction n'étant pas intégrable au voisinage de $+\infty$, il en est de même de la fonction $t \mapsto \dfrac{(x^2 - t^2)h(t)}{(x^2 + t^2)^2}$.

Mais alors, cette fonction étant de signe constant au voisinage de $+\infty$, $\displaystyle\int_{0}^{A} \frac{(x^2 - t^2)h(t)}{(x^2 + t^2)^2}\ dt$ n'a pas de limite réelle quand $A$ tend vers $+\infty$, et finalement $\displaystyle\int_{0}^{A} \frac{tf(t)}{x^2 + t^2}\ dt$ n'a pas de limite réelle quand $A$ tend vers $+\infty$.

**5.** Supposons $m = 0$. Dans ce cas, le calcul fait en 3. fournit

$$|h(y)| = \left|\int_{pT}^{y} f(t)\ dt\right| \leq \int_{pT}^{y} |f(t)|\ dt \leq \int_{pT}^{(p+1)T} |f(t)|\ dt = \int_{0}^{T} |f(t)|\ dt.$$

 

La fonction $h$ est donc bornée au voisinage de $+\infty$. Mais alors, quand $A$ tend vers $+\infty$, $\dfrac{Ah(A)}{x^2+A^2} = O\left(\dfrac{1}{A}\right)$ et en particulier, $\dfrac{Ah(A)}{x^2+A^2}$ tend vers $0$.

D'autre part, quand $t$ tend vers $+\infty$, $\dfrac{(x^2-t^2)h(t)}{(x^2+t^2)^2} = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et la fonction $t \mapsto \dfrac{(x^2-t^2)h(t)}{(x^2+t^2)^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$. On en déduit que $\displaystyle\int_0^A \dfrac{(x^2-t^2)h(t)}{(x^2+t^2)^2}\,dt$ a une limite réelle quand $A$ tend vers $+\infty$, et finalement que $\displaystyle\int_0^A \dfrac{tf(t)}{x^2+t^2}\,dt$ a une limite réelle quand $A$ tend vers $+\infty$.

# PARTIE II

**1.** Pour $(x,t) \neq (0,0)$, $\dfrac{t}{x^2+t^2}\dfrac{1}{2i}\dfrac{(x+it)-(x-it)}{(x+it)(x-it)} = \dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{1}{x-it} - \dfrac{1}{x+it}\right)$. Mais alors, pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(\frac{t}{x^2+t^2}\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{(-1)^k k!}{(x-it)^{k+1}} - \frac{(-1)^k k!}{(x+it)^{k+1}}\right).$$

Puis,

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(\frac{t}{x^2+t^2}\right)\right| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{k!}{|x-it|^{k+1}} + \frac{k!}{|x-it|^{k+1}}\right) = \frac{k!}{(x^2+t^2)^{(k+1)/2}}.$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall (x,t) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},\ \left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(\frac{t}{x^2+t^2}\right)\right| \leq \frac{k!}{(x^2+t^2)^{(k+1)/2}}.}$$

**2. a)** Posons $\begin{array}{cccc}\Phi_1 & : & ]0,+\infty[\times]0,1] & \to \mathbb{R} \\ & & (x,t) & \mapsto \dfrac{tf(t)}{x^2+t^2}\end{array}$.

• On sait déjà que, pour chaque $x \in ]0,+\infty[$ la fonction $t \mapsto \Phi_1(x,t)$ est continue et intégrable sur $]0,1]$.
• $\Phi_1$ admet sur $]0,+\infty[\times]0,1]$ des dérivées partielles à tout ordre de la forme

$$\frac{\partial^k \Phi_1}{\partial x^k}(x,t) = \frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(\frac{tf(t)}{x^2+t^2}\right)(x,t) = \frac{P_k(x,t)}{(x^2+t^2)^{k+1}}tf(t),$$

où $P$ est un polynôme à deux variables. Ensuite,

- pour chaque $t \in ]0,1]$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial^k \Phi_1}{\partial x^k}(x,t)$ est continue sur $]0,+\infty[$ ;
- pour chaque $x \in ]0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^k \Phi_1}{\partial x^k}(x,t)$ est continue sur $]0,1]$ ;
-enfin, pour majorer $\left|\dfrac{\partial^k \Phi_1}{\partial x^k}(x,t)\right|$ uniformément en $x$, on fixe deux réels $a$ et $A$ tels que $0 < a < A$. On minore le dénominateur de $\dfrac{|P_k(x,t)|}{(x^2+t^2)^{k+1}}$ par $(a^2)^{k+1}$, on majore le numérateur par une somme de valeurs absolues où chaque expression en $x$ est majorée par une expression en $A$. Il reste

$$\left|\frac{\partial^k \Phi_1}{\partial x^k}(x,t)\right| \leq Q_k(|t|) \times t|f(t)| = \varphi_k(t),$$

où $Q_k$ est un polynôme. Par suite, quand $t$ tend vers $0$, $\varphi_k(t) = O(tf(t))$ et donc $\varphi_k$ est une fonction continue et intégrable sur $]0,1]$.

Le travail précédent étant valable pour tout choix de $a$ et $A$, le théorème de Leibniz généralisé, l'application $x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{tf(t)}{x^2+t^2}\,dt$ est de classe $C^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et $\forall x > 0$, $\dfrac{d^k}{dx^k}\left(\displaystyle\int_0^1 \frac{tf(t)}{x^2+t^2}\,dt\right) = \displaystyle\int_0^1 \frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{tf(t)}{x^2+t^2}\right)\,dt$.

**b)** Posons $\begin{array}{cccc}\Phi_2 & : & ]0,+\infty[\times[1,+\infty[ & \to \mathbb{R} \\ & & (x,t) & \mapsto \dfrac{tf(t)}{x^2+t^2}\end{array}$.

Le travail est identique à celui effectué pour $\Phi_1$ sauf la majoration. La question précédente montre que pour $(x,t) \in ]0,+\infty[\times[1,+\infty[$,

 

$$\left|\frac{\partial^k \Phi_2}{\partial x^k}(x,t)\right| \leq \frac{k!}{(x^2+t^2)^{(k+1)/2}}|f(t)| \leq \frac{k!}{t^{k+1}}|f(t)| \leq \frac{|f(t)|}{t} = \varphi_k(t),$$

avec encore une fois $\varphi_k$ continue et intégrable sur $[1,+\infty[$. Par suite, l'application $x \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{tf(t)}{x^2+t^2}\,dt$ est de classe $C^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et $\forall x > 0$, $\frac{d^k}{dx^k}\left(\int_1^{+\infty} \frac{tf(t)}{x^2+t^2}\,dt\right) = \int_1^{+\infty} \frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{tf(t)}{x^2+t^2}\right)\,dt$. Finalement

$$\boxed{F \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } ]0,+\infty[ \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in ]0,+\infty[,\ F^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(\frac{t}{x^2+t^2}\right)\,dt.}$$

# PARTIE IV

**1.** Pour chaque $x \in [0,+\infty[$, l'application $t \mapsto \frac{tf(t)}{x^2+t^2}$ est continue par morceaux sur $[1,+\infty[$;
Pour xhaque $t \in [1,+\infty[$, l'application $x \mapsto \frac{tf(t)}{x^2+t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$;
Pour $(x,t) \in [0,+\infty[\times[1,+\infty[$, $\left|\frac{tf(t)}{x^2+t^2}\right| \leq \frac{t|f(t)|}{t^2} = \frac{|f(t)|}{t} = \varphi(t)$.
Puisque $\varphi$ est continue et intégrable sur $[1,+\infty[$, le théorème de continuité des intégrales à paramètres permet d'affirmer que

$$\boxed{\Phi \text{ est continue sur } \mathbb{R}^+.}$$

**2.** Soit $x > 0$. Les deux fonctions $t \mapsto f(t)$ et $t \mapsto \frac{1}{2}\ln(x^2+t^2)$ sont de classe $C^1$ sur le segment $[0,1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\int_0^1 \frac{t}{x^2+t^2}f(t)\,dt = \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+t^2)f(t)\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \ln(x^2+t^2)f'(t)\,dt = \frac{f(1)}{2}\ln(1+x^2) - f(0)\ln x - \frac{1}{2}\int_0^1 \ln(x^2+t^2)f'(t)\,dt.$$

Quand $x$ tend vers $0$, on a déjà $\frac{f(1)}{2}\ln(1+x^2) - f(0)\ln x = -f(0)\ln x + O(1)$.
Ensuite, $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et en particulier, $f'$ est bornée sur $[0,1]$. On note $M$ un majorant de $|f'|$ sur $[0,1]$. On suppose de plus $x \in ]0,1]$. Pour $t \in [0,1]$, on a alors $\ln t \leq\leq \frac{1}{2}\ln(x^2+t^2) \leq \frac{1}{2}\ln(1+t^2)$ et donc

$$\left|\frac{1}{2}\int_0^1 \ln(x^2+t^2)f'(t)\right| \leq \max\left\{M|\ln t|, M|\frac{1}{2}\ln(1+t^2)|\right\} = g(t).$$

Chacune des deux fonctions $g_1 \ :\ t \mapsto M|\ln t|$ et $g_2 \ :\ t \mapsto M|\frac{1}{2}\ln(1+t^2)|$ est continue et intégrable sur $]0,1]$ et donc $g \ :\ t \mapsto \frac{1}{2}(g_1+g_2+|g_1-g_2|)$ l'est aussi. Ainsi, pour tout $x \in [0,1]$,

$$\left|\frac{1}{2}\int_0^1 \ln(x^2+t^2)f'(t)\,dt\right| \leq \frac{1}{2}\int_0^1 \left|\ln(x^2+t^2)f'(t)\right|\,dt \leq \int_0^1 g(t)\,dt < +\infty.$$

Mais alors, quand $x$ tend vers $0$, on a $\frac{1}{2}\int_0^1 \ln(x^2+t^2)f'(t)\,dt = O(1)$ et on en déduit que $\int_0^1 \frac{t}{x^2+t^2}f(t)\,dt = -f(0)\ln x + O(1)$. Enfin, puisque $\Phi$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, $\Phi$ est en particulier bornée au voisinage de $0$ et donc quand $x$ tend vers $0$,

$$F(x) = \int_0^1 \frac{t}{x^2+t^2}f(t)\,dt + \int_1^{+\infty} \frac{t}{x^2+t^2}f(t)\,dt = -f(0)\ln x + O(1) + \Phi(x) = -f(0)\ln x + O(1).$$

Comme la fonction $x \mapsto \ln x$ n'est pas bornée au voisinage de $0$ et que $f(0) \neq 0$, on a finalement

$$\boxed{F(x) \underset{x\to 0}{\sim} -f(0)\ln x.}$$

 

**3. a.** Pour $x > 0$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+t^2}\,dt = \left[\text{Arctan}\,\frac{t}{x}\right]_0^1 = \text{Arctan}\,\frac{1}{x}$.

$$\boxed{\forall x > 0,\ \int_0^1 \frac{x}{x^2+t^2}\,dt = \text{Arctan}\,\frac{1}{x}.}$$

**b.** Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned} xF(x) &= x\int_0^1 \frac{tf(t)}{x^2+t^2}\,dt + x\int_1^{+\infty} \frac{tf(t)}{x^2+t^2}\,dt = \int_0^1 \frac{x}{x^2+t^2}\,dt + \int_0^1 \frac{x}{x^2+t^2}(tf(t)-1)\,dt + x\Phi(x) \\ &= \text{Arctan}\,\frac{1}{x} + \int_0^1 \frac{x}{x^2+t^2}(tf(t)-1)\,dt + x\Phi(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\,x + x\Phi(x) + \int_0^1 \frac{x}{x^2+t^2}(tf(t)-1)\,dt. \end{aligned}$$

Puisque $\phi$ est continue en $0$, on a déjà $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\,x + x\Phi(x) = \frac{\pi}{2}$. Il reste à vérifier que $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \int_0^1 \frac{x}{x^2+t^2}(tf(t)-1)\,dt = 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $f(t)$ équivaut à $\dfrac{1}{t}$ quand $t$ tend vers $0$, $\exists a \in ]0,1[$ tel que, pour $t \in ]0,a]$, $|tf(t)-1| \leq \dfrac{\varepsilon}{\pi}$. Pour tout réel $x > 0$, on a alors

$$\begin{aligned} \left|\int_0^1 \frac{x}{x^2+t^2}(tf(t)-1)\,dt\right| &\leq \int_0^a \left|\frac{x}{x^2+t^2}(tf(t)-1)\right|\,dt + \left|\int_a^1 \frac{x}{x^2+t^2}(tf(t)-1)\,dt\right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{\pi}\int_0^a \frac{x}{x^2+t^2}\,dt + \left|\int_a^1 \frac{x}{x^2+t^2}(tf(t)-1)\,dt\right| \leq \frac{\varepsilon}{\pi}\int_0^1 \frac{x}{x^2+t^2}\,dt + \left|\int_a^1 \frac{x}{x^2+t^2}(tf(t)-1)\,dt\right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{\pi}\,\text{Arctan}\,\frac{1}{x} + \left|\int_a^1 \frac{x}{x^2+t^2}(tf(t)-1)\,dt\right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \left|\int_a^1 \frac{x}{x^2+t^2}(tf(t)-1)\,dt\right|. \end{aligned}$$

Maintenant, pour chaque $x \in [0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto \dfrac{x}{x^2+t^2}(tf(t)-1)$ est continue sur $[a,1]$ et pour chaque $t \in [a,1]$, la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{x^2+t^2}(tf(t)-1)$ est continue sur $[0,+\infty[$. Enfin, à $t$ fixé, $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x}{x^2+t^2}\right) = \dfrac{t^2-x^2}{(t^2+x^2)^2}$. Ce qui montre que à $t$ fixé, l'expression $\dfrac{x}{x^2+t^2}$ croît sur $[0,t]$ de $0$ à $\dfrac{1}{2t}$ puis décroît sur $[t,+\infty[$ de $\dfrac{1}{t}$ à $0$. On en déduit que pour tout $(x,t) \in [0,+\infty[\times[a,1]$,

$$\left|\frac{x}{x^2+t^2}(tf(t)-1)\right| \leq \frac{1}{2t}|tf(t)-1| = \varphi(t),$$

avec $\varphi$ fonction continue et intégrable sur $[a,1]$.

Le théorème de continuité des intégrales à paramètres montre que la fonction fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^1 \frac{x}{x^2+t^2}(tf(t)-1)\,dt$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et en particulier, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\int_a^1 \frac{x}{x^2+t^2}(tf(t)-1)\,dt = \int_a^1 \frac{0}{0^2+t^2}(tf(t)-1)\,dt = 0$. Par suite, il existe $\alpha > 0$ tel que pour $x \in ]0,\alpha[$, $\displaystyle\left|\int_a^1 \frac{0}{0^2+t^2}(tf(t)-1)\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Pour $x \in ]0,\alpha[$, on a alors $\displaystyle\left|\int_0^1 \frac{x}{x^2+t^2}(tf(t)-1)\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. On a montré que $\displaystyle\lim_{x\to 0}\int_0^1 \frac{x}{x^2+t^2}(tf(t)-1)\,dt = 0$ et donc que

$$\boxed{\lim_{x\to 0} xF(x) = \frac{\pi}{2}.}$$

 